Escuela de organización industrial

Matemáticas Financieras

Juan Domínguez Jiménez

Profesor de Finanzas

Revisión: Julio 2011

Esta publicación está bajo licencia Creative Commons Reconocimiento, Nocomercial, Compartirigual, (by-nc-sa). Usted puede usar, copiar y difundir este documento o parte del mismo siempre y cuando se mencione su origen, no se use de forma comercial y no se modifique su licencia.
Más información: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/

Escuela de organización industrial

ÍNDICE:

1. INTRODUCCIÓN. 3

Introducción a las matemáticas financieras. 3

2. DEFINICIONES. 5

2.1. Capital Financiero. 5

2.2. Equivalencia Financiera. 6

2.3. Operación Financiera. 6

2.4. Esquemas de Flujos de Fondos. 8

3. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO SIMPLES. 9

3.1. Interés Simple. 9

3.2. Capitalización Simple. 11

3.3. Descuento Simple. 13

4. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO COMPUESTOS. 16

4.1. Interés Compuesto. 16

4.2. Capitalización Compuesta. 17

4.3. Descuento Compuesto. 19

4.4. Interés Compuesto Fraccionado. 21

4.5. Diferencia entre Interés Simple y Compuesto. 23

5. TASA ANUAL EQUIVALENTE. 25

5.1. Concepto de Tasa Anual Equivalente. 25

5.2. Ejemplos Uso de la Tasa Anual Equivalente. 26

6. ANÁLISIS DE INVERSIONES. 28

6.1. Introducción. 28

6.2. Proceso en la Valoración de Inversiones. 28

6.3. Plazo de Recuperación. 30

6.4. Valor Actual Neto. 31

6.5. Tasa Interna de Retorno. 33

6.6. Ejemplo y Consideraciones Finales. 34

1. INTRODUCCIÓN

Introducción a las matemáticas financieras

Este documento es una introducción a los principales elementos de las Matemáticas Financieras.

El principio básico de las Matemáticas Financieras es el de la **preferencia por la liquidez**, según el cual a igualdad de cantidad de bienes, aquellos bienes más cercanos en el tiempo son preferidos a los disponibles en momentos más lejanos.

Esta preferencia por la liquidez tiene un precio o valor objetivo. El precio de la preferencia por la liquidez se establece en el mercado de la financiación (también llamado mercado del dinero) y se conoce como interés.

El **interés** se puede definir, por tanto, como el *precio por el uso del dinero durante un período de tiempo*. También se puede decir que el interés es la retribución por el aplazamiento en el tiempo del consumo.

El interés se mide como un porcentaje sobre el bien o dinero prestado, por ello es conocido como **tipo de interés** (o también como tanto de interés).

La compensación económica que supone el interés se exige principalmente por la **falta de disponibilidad** que supone desprenderse del capital durante un tiempo. Esta falta de disponibilidad del capital tiene un coste de oportunidad en la medida que el capital podría ser invertido en cualquier tipo de actividad que produjese un rendimiento durante ese tiempo en que está siendo prestado.

Existen otros dos motivos que influyen en la exigencia de un interés por el uso del dinero:

- Por el **riesgo** que se asume, ya que por distintos motivos podría no recuperarse el dinero prestado.

- Cuando existe inflación, por la **depreciación** del valor del dinero por el mero discurrir del tiempo.

Una vez visto que es la falta de liquidez, el riesgo y la depreciación los que determinan la existencia de un tipo de interés, se puede concretar que la cuantía de la compensación económica por el uso del dinero dependerá de tres variables:

- La cantidad de **capital** invertido
- El **tiempo** que dura la operación de inversión
- El **tipo de interés** al que se acuerda la operación de inversión

La cuantía de la compensación económica por el uso del dinero será tanto mayor cuanto mayor sea el importe de capital invertido, mayor sea el plazo pactado, o mayor sea el tipo de interés acordado para la operación.

2. DEFINICIONES

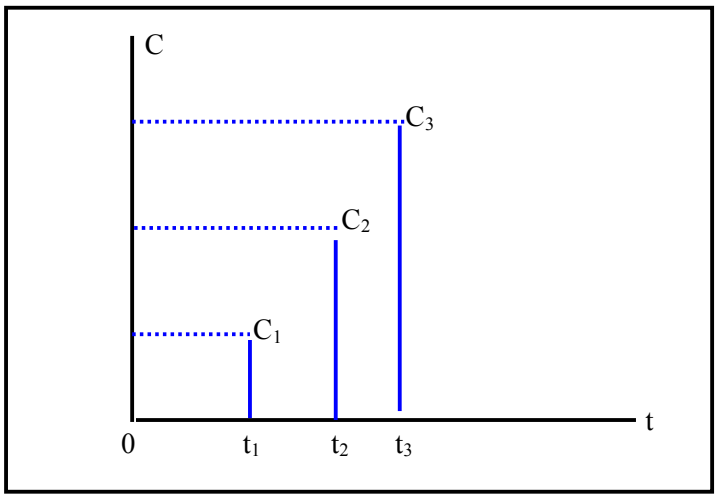
2.1. Capital Financiero

Se define como capital financiero al **valor de todo bien económico en el instante de tiempo en el que es disponible**.

Por tanto, un bien o un capital (C) disponible en un momento concreto del tiempo (t) constituye un capital financiero.

El capital financiero se representa formalmente por el par ordenado (C, t), donde C es la cuantía del capital y t es el momento del tiempo en que es disponible.

La representación gráfica de capitales financieros se suele hacer de la siguiente forma:



En el anterior gráfico se observa el ejemplo de la representación gráfica de tres capitales financieros (tres cuantías diferentes en tres momentos distintos de tiempo).

Debido al principio de preferencia por la liquidez un mismo bien económico (C) disponible en dos momentos del tiempo diferentes (t_1 y t_2) no es igualmente preferido. Se prefiere el bien más cercano en el tiempo.

Por tanto, un mismo bien económico disponible en dos momentos del tiempo diferentes constituye dos capitales financieros diferentes, y será preferido aquel más cercano en el tiempo.

2.2. Equivalencia Financiera

Como se ha visto, todo bien económico referido al instante de tiempo en el que es disponible es un capital financiero.

Diremos que dos capitales en dos momentos dados del tiempo son equivalentes cuando al propietario de dichos capitales financieros le resulte indiferente una situación o la otra.

Si a un inversor le resulta indiferente percibir hoy 10.000 euros a recibir 10.500 euros dentro de un año, entonces diremos que ambos capitales financieros (10.000; 0) y (10.500; 1) son **financieramente equivalentes**.

Dos capitales financieros cualesquiera, C_1 con vencimiento en t_1 y C_2 con vencimiento en t_2, son **financieramente equivalentes** cuando se está de acuerdo en intercambiar uno por otro ya que los dos capitales financieros son indiferentes (están en equilibrio financiero).

2.3. Operación Financiera

Se entiende por operación financiera a un **intercambio temporal de capitales financieros**.

Hay una operación financiera cuando se sustituyen uno o más capitales por otro u otros **equivalentes** en distintos momentos de tiempo, mediante la aplicación de una **ley financiera**.

Es decir, para que una operación financiera se realice es necesario:

- Que a las dos partes implicadas en la operación (deudor y acreedor) las cuantías que entregan y reciben les resulten **equivalentes**.
- Es necesario además que las dos partes (deudor y acreedor) se pongan de acuerdo en la **forma de cuantificar los capitales** de los que se parte y a los que finalmente se llega. Esto implica elegir un método matemático que permita calcular los intereses de la operación.

Los métodos matemáticos para calcular los intereses de la sustitución de capitales financieros de cualquier operación financiera son conocidos como **leyes financieras**.

Por lo tanto, una ley financiera es el acuerdo al que llegan las partes que intervienen en una operación financiera sobre el modelo que se va a emplear para valorar el dinero en el tiempo.

Dependiendo de la ley financiera acordada se deberá utilizar una **fórmula matemática** u otra para valorar el dinero en el tiempo.

Valorar el dinero en el tiempo también es conocido como "mover" el dinero a lo largo del tiempo. Lógicamente existen dos tipos de movimientos a lo largo del tiempo:

- Mover el dinero hacia el futuro, es decir, *aplazar el dinero* y valorarlo en un momento de tiempo posterior recibe el nombre de **capitalizar** o **diferir**.
- Mover el dinero hacia atrás, es decir, *anticipar el dinero* y valorarlo en un momento de tiempo anterior recibe el nombre de **descontar** o **actualizar**.

Los métodos matemáticos que permiten cuantificar los intereses del aplazamiento y/o anticipación de un capital en el tiempo se conocen como **leyes financieras**.

Las Matemáticas Financieras proporcionan las distintas leyes financieras que permiten aplazar capitales en el tiempo (o **capitalizar**) y las que permiten anticipar capitales (o **descontar**).

El objetivo esencial de este curso de Matemáticas Financieras es conocer las diferentes leyes financieras que existen y su funcionamiento para poder entender la formalización de los diferentes tipos de operaciones financieras de capitalización y descuento.

2.4. Esquemas de Flujos de Fondos

Las operaciones financieras suponen un intercambio temporal de uno o varios capitales por otro u otros capitales.

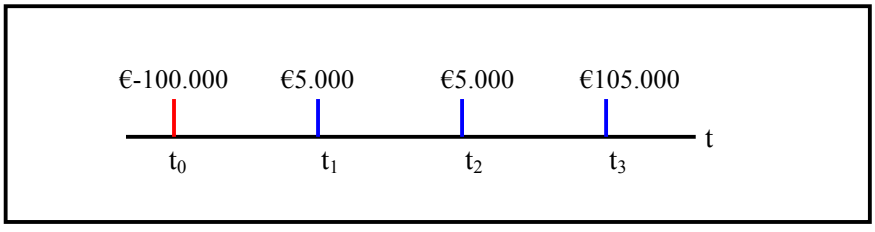
Hay operaciones que son relativamente sencillas pero otras pueden ser muy **complejas** debido al elevado número de capitales que intervienen en distintos momentos de tiempo.

De cara a facilitar el análisis de las operaciones financieras es muy común el uso de los **esquemas** de las operaciones.

Estos esquemas o gráficos de las operaciones están basados en una línea temporal en la que se incorporan todos los flujos de fondos de entrada y salida asociados a la operación en el momento de tiempo en que tienen lugar.

Esquema de flujos de fondos de un préstamo por importe de 100.000 euros. El principal del préstamo se devuelve a los 3 años y anualmente se pagan unos intereses del 5%.

- Importe del préstamo (en t_0): 100.000 euros
- Importe anual de intereses (en t_1, t_2 y t_3): 5.000 euros (5% de 100.000 euros)
- Devolución del principal del préstamo (en t_3): 100.000 euros



3. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO SIMPLES

3.1. Interés Simple

Las operaciones financieras en las que aplica el interés simple serán aquellas en las que los intereses se calculan siempre sólo sobre el principal.

Que los intereses que se producen en cada período se calculan siempre sobre el principal quiere decir que en el interés simple los **intereses no son productivos**, es decir, los intereses no son capaces de producir a su vez más intereses.

La fórmula del interés simple es relativamente sencilla, ya que el interés (simple) de una operación dependerá directamente del capital, del tipo de interés pactado, y de la duración.

Interés simple (i) = Capital (c) x Tipo de Interés (r) x Tiempo (t)

Es decir:

$$\mathbf{i = c \times r \times t}$$

Es importante destacar que los tipos de interés que se suelen proporcionar en tanto por ciento deben ser introducidos en la fórmula en tantos por uno.

Un tipo de interés del 8% anual debe ser incorporado a la fórmula de cálculo como 0,08.

También es importante destacar que el tipo de interés (r) y el tiempo (t) tienen que ser homogéneos. Como lo normal es que el tipo de interés (r) sea un tanto anual, hay que expresar el tiempo en número de años o como una fracción de año.

El tipo de interés de una operación de interés simple es el 5% anual:

- Si la duración es 3 años, t = 3
- Si la duración es 18 meses, t = 18 / 12 = 1,5
- Si la duración es 1 año, t = 1
- Si la duración es 6 meses, t = 6 / 12 = 0,5
- Si la duración es 1 día, t = 1 / 365

A continuación se muestran tres ejemplos de cálculo de intereses simples:

Préstamo de €10.000 a devolver dentro de 10 meses. Calcular el interés simple si el tipo de interés pactado es del 6% anual.

$$\text{Interés simple} = c \times r \times t = €10.000 \times 0{,}06 \times (10/12) = €500$$

Préstamo de €50.000 a devolver dentro de 4 años. Determinar el interés simple si el tipo de interés anual pactado es del 7,5%.

$$\text{Interés simple} = c \times r \times t = €50.000 \times 0{,}075 \times 4 = €15.000$$

Calcular el interés simple de un préstamo de € 1.000.000 a un día si el tipo de interés anual pactado es del 8%.

$$\text{Interés simple} = c \times r \times t = €1.000.000 \times 0{,}08 \times (1/365) = €219{,}18$$

3.2. Capitalización Simple

La capitalización simple implica aplazar el dinero y valorarlo en un momento de tiempo posterior usando la ley financiera del interés simple.

Si tenemos un capital (C_0) que queremos capitalizar con una **capitalización simple**, es decir queremos valorarlo en otro momento posterior (C_1) mediante la ley financiera de interés simple, la diferencia entre las dos valoraciones del capital (C_0 y C_1) será el interés simple de la operación.

Es decir que:

$$C_1 = C_0 + i$$

Sustituyendo el interés simple (i) por su fórmula:

$$C_1 = C_0 + (C_0 \times r \times t)$$

Operando:

$$\mathbf{C_1 = C_0 \times (1 + (r \times t))}$$

Los casos más comunes de uso de la capitalización simple son:

- En el cálculo de la remuneración de las cuentas corrientes.
- En la determinación de los costes financieros de los préstamos a menos de un año (ya se explicará el motivo al ver la capitalización compuesta).

Ejercicios:

Calcular el saldo final dentro de 1 mes de una cuenta corriente que ofrece un interés simple anual del 3% si el saldo inicial de la cuenta es de €75.000.

$$C_1 = C_0 \text{ x } (1 + (r \text{ x } t))$$

$$C_1 = €75.000 \text{ x } (1 + (0{,}03 \text{ x } (1/12))) = €75.187{,}5$$

Calcular la cantidad a devolver al banco por un préstamo a 3 meses a un interés simple anual del 6,5% si el importe solicitado es de €100.000.

$$C1 = C0 \text{ x } (1 + (r \text{ x } t))$$

$$C_1 = €100.000 \text{ x } (1 + (0{,}065 \text{ x } (3/12))) = €101.625$$

El importe de los intereses será:

$$I = C_1 - C_0 = € \ 101.625 - €100.000 = €1.625$$

3.3. Descuento Simple

El descuento simple implica adelantar el dinero y valorarlo en un momento de tiempo previo usando la ley financiera del interés simple.

Análogamente a lo visto en la capitalización simple, si tenemos un capital (C_1) que queremos descontar con un **descuento simple**, es decir queremos valorarlo en otro momento anterior (C_0) mediante la ley financiera de interés simple, la diferencia entre las dos valoraciones del capital (C_0 y C_1) será el interés simple de la operación.

Como sabemos de la capitalización simple:

$$C_1 = C_0 \times (1 + (r \times t))$$

Por lo que:

$$\mathbf{C_0 = C_1 / (1 + (r \times t))}$$

El caso más común de uso del descuento simple es en el descuento bancario de efectos (por ejemplo letras de cambio o pagarés) o en descuento asociado a cualquier otro producto bancario de similares características (por ejemplo el "factoring").

Ejercicio:

Calcular el importe que nos entregará hoy el banco si descontamos una letra de €100.000 con vencimiento en 90 días al 6% de interés simple anual.

$$C_0 = C_1 / (1 + (r \times t))$$

$$C_0 = €100.000 / (1 + (0{,}06 \times (90/365))) = €98.542{,}12$$

Existen determinadas prácticas que buscan maximizar el montante de intereses a pagar por el solicitante de un préstamo o de cualquier otro tipo de financiación.

Algunas de estas prácticas se han generalizado en la práctica bancaria constituyendo en la actualidad una parte muy importante de los resultados de las entidades financieras.

Una de estas prácticas es el uso de **año comercial** en las operaciones de empréstito o de descuento inferiores a un año (no en las remuneraciones de las inversiones).

El año comercial es un año de 360 días formado por 12 meses de 30 días. El uso del año comercial en lugar del año natural permite en una operación de empréstito o descuento a menos de un año que el interés total a aplicar al préstamo sea superior.

Ejercicio:

Siguiendo con el ejemplo anterior del descuento de una letra, calcular el importe que nos entregará hoy el banco si descontamos una letra de €100.000 con vencimiento en 90 días al 6% de interés simple anual pero usando el **año comercial**.

$$C_0 = C_1 / (1 + (r \times t))$$

$$C_0 = €100.000 / (1 + (0{,}06 \times (90/360))) = €98.522{,}17$$

La cantidad que percibimos ahora (€98.522,17) es inferior a la que percibíamos usando el año natural (€98.542,12), lo que quiere decir que los intereses retenidos por el banco son superiores.

Otra de las prácticas bancarias habituales es el uso del **descuento comercial**. El descuento comercial consiste en aplicar el interés simple sobre el capital objeto de descuento en lugar de descontarlo (que equivale a aplicar el interés simple sobre cantidad neta ya descontada). El uso del descuento comercial permite en una operación de descuento aplicar el tipo de interés sobre un capital superior por lo que el interés total de la operación es superior.

Ejercicio:

Continuando con el ejemplo anterior del descuento de una letra, calcular el importe que nos entregará hoy el banco si realizamos un **descuento comercial** de una letra de €100.000 con vencimiento en 90 días al 6% de interés simple anual (utilización de año comercial).

La liquidación que nos realizaría el banco sería:

Importe letra: €100.000

Interés: €100.000 x 0,06 x (90/360) = €1.500

Liquido: €100.000 - €1.500 = €98.500

La cantidad que percibimos usando descuento comercial y simultáneamente año comercial (€98.500) es la cantidad más baja de todas las calculadas, lo que quiere decir que los intereses totales retenidos por el banco son los máximos.

4. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO COMPUESTOS

4.1. Interés Compuesto

Las operaciones financieras en las que aplica el interés compuesto serán aquellas en las que los intereses se calculan sobre el principal y sobre los intereses generados en periodos anteriores.

El interés compuesto asume que los **intereses son productivos**, es decir, los intereses son capaces de producir a su vez más intereses en el futuro.

La inclusión del interés compuesto en las fórmulas de cálculo es algo más compleja que en el caso del interés simple. Pasamos a ver su formulación básica analizando el capital final al aplicar el interés compuesto después varios periodos:

Periodo	**Capital final**
0	C_0
1	$C_0 \times (1 + r)$
2	$C_0 \times (1 + r) + r \times (C_0 \times (1 + r)) = C_0 \times (1 + r)^2$
3	$C_0 \times (1 + r)^2 + r \times (C_0 \times (1 + r)^2) = C_0 \times (1 + r)^3$
4	$C_0 \times (1 + r)^3 + r \times (C_0 \times (1 + r)^3) = C_0 \times (1 + r)^4$
t	$\ldots = C_0 \times (1 + r)^t$

Es decir, la expresión de interés compuesto $(1 + r)^t$ será la que nos permita multiplicando o dividiendo realizar capitalización compuesta o actualización compuesta.

$$\mathbf{(1 + r)^t}$$

Como en el caso del interés simple, los tipos de interés que se proporcionan en tanto por ciento deben ser introducidos en las fórmulas en tantos por uno.

También, como ocurría con el interés simple, el tipo de interés (r) y el tiempo (t) tienen que ser homogéneos. Al venir normalmente el tipo de interés (r) en un tanto anual, hay que expresar el tiempo en número de años o como una fracción de año.

4.2. Capitalización Compuesta

La capitalización compuesta implica aplazar el dinero y valorarlo en un momento de tiempo posterior usando la ley financiera del interés compuesto.

Si tenemos un capital (C_0) que queremos capitalizar con una **capitalización compuesta**, es decir queremos valorarlo en otro momento posterior (C_1) mediante la ley financiera de interés compuesto, deberemos **multiplicar** el capital inicial (C_0) por la expresión del interés compuesto $[(1 + r)^t]$.

Es decir que:

$$\mathbf{C_1 = C_0} \times (1 + \mathbf{r})^{\mathbf{t}}$$

El caso más común de uso de la capitalización compuesta es en la determinación de los costes financieros de los préstamos a más de un año (se explicará el motivo al ver las diferencias entre el interés simple y compuesto).

Ejercicios:

Calcular la cantidad a devolver al banco por un préstamo a 3 años a un interés compuesto anual del 6,5% si el importe solicitado es de €100.000.

$$C_1 = C_0 \times (1 + r)^t$$

$$C_1 = €100.000 \times (1 + 0{,}065)^3 = €120.794{,}96$$

Calcular el interés de un préstamo a 3 meses a un interés compuesto anual del 6% si el importe solicitado es de €400.000.

$$\text{Interés compuesto} = C_1 - C_0 = C_0 \times (1 + r)^t - C_0 = C_0 \times ((1 + r)^t - 1)$$

$$\text{Interés compuesto} = €400.000 \times ((1 + 0{,}06)^{3/12} - 1) = €5.869{,}54$$

Es muy común que varíe el tipo de interés durante la duración de una operación. En ese caso no se puede utilizar la expresión $(1 + r)^t$ directamente, habrá que ajustar la fórmula para considerar los diferentes tipos de interés vigentes durante la operación.

Calcular la cantidad a devolver al banco por un préstamo a 5 años a un interés compuesto anual del 6,5% los tres primeros años y del 5,5% los dos últimos años si el importe solicitado es de €100.000.

$$C_1 = C_0 \times (1 + r_1)^3 \times (1 + r_2)^2$$

$$C_1 = €100.000 \times (1 + 0{,}065)^3 \times (1 + 0{,}055)^2 = €134.447{,}81$$

4.3. Descuento Compuesto

El descuento compuesto implica adelantar el dinero y valorarlo en un momento de tiempo previo usando la ley financiera del interés compuesto.

Análogamente a lo visto en la capitalización compuesta, si tenemos un capital (C_1) que queremos descontar con un **descuento compuesto**, es decir queremos valorarlo en otro momento anterior (C_0) mediante la ley financiera de interés compuesto, deberemos **dividir** el capital (C_1) por la expresión del interés compuesto [$(1 + r)^t$].

Por lo que:

$$\mathbf{C_0 = C_1 / (1 + r)^t}$$

Los casos más comunes de uso del descuento compuesto son:

- En la determinación del valor actual de rentas futuras.
- En el cálculo de valores deflactados (netos del efecto inflación).

Ejercicios:

Calcular el valor actual de una renta que se recibirá dentro de 4 años por importe de €500.000 si el tipo de interés de descuento compuesto es del 5%.

$$C_0 = C_1 / (1 + r)^t$$

$$C_0 = €500.000 / (1 + 0{,}05)^4 = €411.351{,}24$$

Un empleado recibe una bonificación pagadera a su jubilación (65 años) por parte de su empresa de €100.000 euros. Calcular el valor actual de esa bonificación si sabemos que el empleado tiene hoy 35 años y la tasa de esperada de inflación a largo plazo es del 2,5%.

$$C_0 = C_1 / (1 + r)^t$$

$$C_0 = €100.000 / (1 + 0{,}025)^{30} = €47.674{,}27$$

El salario mínimo mensual pactado en un convenio colectivo se ha fijado en €900 para el próximo año y de €925 para el siguiente. Si la inflación esperada en los dos próximos años será del 3% anual, determinar el valor deflactado a fecha de hoy del salario fijado para el primer y segundo año de convenio.

$$C_0 = C_1 / (1 + r)^t$$

Salario mínimo mensual deflactado primer año del convenio:

$$C_0 = €900 / (1 + 0{,}03) = €873{,}79$$

Salario mínimo mensual deflactado segundo año del convenio:

$$C_0 = €925 / (1 + 0{,}03)^2 = €871{,}90$$

4.4. Interés Compuesto Fraccionado

Existe la posibilidad de que las partes involucradas en una operación financiera decidan pactar una mayor frecuencia en el cálculo de intereses que la anual.

Si la frecuencia de cálculo de intereses aumenta la formula del interés compuesto cambia también.

En el caso de cálculo anual la expresión general era: $(1 + r)^t$

En el caso de cálculo semestral aplicaríamos la mitad del interés anual dos veces por año.

- Para un año: $(1 + r/2)^2$
- Para dos años: $(1 + r/2)^4$
- Para t años: $(1 + r/2)^{2t}$

En el caso de cálculo trimestral aplicaríamos un cuarto del interés anual cuatro veces.

- Para un año: $(1 + r/4)^4$
- Para dos años: $(1 + r/4)^8$
- Para t años: $(1 + r/4)^{4t}$

Si llamamos n al número de periodos anuales de cálculo obtenemos la siguiente **fórmula general del interés compuesto fraccionado**:

$$(1 + r/n)^{nt}$$

Los bancos tendrán tendencia a aumentar el número de capitalizaciones por año de un préstamo de interés compuesto. Al aumentar el número de capitalizaciones los intereses pasarán con más frecuencia a ser incluidos en el cálculo de futuros intereses, aumentando de esa manera el importe total de los intereses a pagar.

Ejercicios:

Calcular la cantidad a devolver al banco por un préstamo a 3 años a un interés compuesto anual del 6,5% si el importe solicitado es de € 100.000 en los casos de capitalización anual, mensual y diaria.

$$C_1 = C_0 \times (1 + r/n)^{nt}$$

Capitalización anual:

$$C_1 = €100.000 \times (1 + 0{,}065)^3 = €120.794{,}96$$

Capitalización mensual:

$$C_1 = €100.000 \times (1 + 0{,}005416)^{36} = €121.467{,}16$$

Capitalización diaria:

$$C_1 = €100.000 \times (1 + 0{,}000178)^{1095} = €121.528{,}99$$

4.5. Diferencia entre Interés Simple y Compuesto

La siguiente tabla muestra las diferencias entre el interés simple y el interés compuesto para distintos meses de un capital de €100.000 a un interés del 5% anual.

Meses	Interés simple	Interés compuesto	Diferencia
1	417	407	9
2	833	816	17
3	1.250	1.227	23
4	1.667	1.640	27
5	2.083	2.054	30
6	2.500	2.470	30
7	2.917	2.887	30
8	3.333	3.306	27
9	3.750	3.727	23
10	4.167	4.150	17
11	4.583	4.574	9
12	**5.000**	**5.000**	**0**
13	5.417	5.428	-11
14	5.833	5.857	-24
15	6.250	6.289	-39
16	6.667	6.722	-55
17	7.083	7.156	-73
18	7.500	7.593	-93
19	7.917	8.031	-115
20	8.333	8.471	-138
21	8.750	8.913	-163
22	9.167	9.357	-190
23	9.583	9.803	-219
24	10.000	10.250	-250

Fórmulas aplicadas:

Interés simple = €100.000 x 0,05 x (t/12)

Interés compuesto = €100.000 x $((1 + 0,05)^{t/12} - 1)$

Analizando los datos de la tabla podemos llegar a las siguientes conclusiones sobre las diferencias que se producen al aplicar el interés simple y el interés compuesto:

- Es indiferente usar el interés simple o el interés compuesto para una operación a un año ya que los dos sistemas de cálculo de intereses coinciden.
- Para operaciones financieras a menos de un año el interés simple es superior al interés compuesto. Por ello los bancos lo imponen como ley de cálculo para operaciones de préstamo a menos de un año: préstamos bancarios a corto plazo, pólizas de crédito, descubiertos en cuenta, o descuento de efectos.
- Para operaciones financieras a más de un año el interés simple es inferior al interés compuesto. Por ello los bancos lo utilizan como ley de cálculo para operaciones de préstamo a más de un año: préstamos bancarios a largo plazo, hipotecas, etc. Lo normal es además combinar el interés compuesto para la operación a largo plazo con capitalizaciones frecuentes (normalmente mensuales) para maximizar el importe total de los intereses de la operación.

5. TASA ANUAL EQUIVALENTE

5.1. Concepto de Tasa Anual Equivalente

En ocasiones, debido a la gran complejidad de algunos productos financieros y al uso de leyes financieras no homogéneas, existe dificultad para poder comparar operaciones financieras alternativas o para poder determinar el coste o la rentabilidad real de una operación financiera concreta.

La **tasa anual equivalente** (TAE) es un instrumento que permite homogenizar todas las operaciones financieras de inversión o financiación traduciendo la rentabilidad o el coste financiero a términos anuales comparables.

Siempre es recomendable calcular la tasa anual equivalente de cada operación de cara a tener una medida clara del coste real de una operación de financiación o de la rentabilidad financiera real ofrecida por un producto de inversión.

La TAE está definida como la tasa de interés anual que iguala el valor actual de los efectivos recibidos y con el valor actual de los efectivos entregados a lo largo de una operación.

Es decir, en cualquier operación financiera el TAE es el tipo de interés en términos anuales que permite igualar el valor de actualización de las entradas con el valor de actualización de las salidas.

Como unos flujos se concentren al principio de la operación y los otros al final de la misma la fórmula habitual de determinación de la TAE es:

$$\mathbf{TAE} = (1 + \mathbf{i_n})^{365/\mathbf{n}} - 1$$

Siendo:

$\mathbf{i_n}$ el tipo de interés en el periodo de la operación.

n el número de días de duración de la operación.

- En muchas ocasiones $(1 + i_n)$ es representado por el cociente entre C_1 y C_0 (C_1 / C_0). En ese caso la fórmula sería TAE = $(C_1 / C_0)^{365/n} - 1$.
- También es común representar 365/n por k, en donde k es el número de veces que un año incluye la duración de la operación. En ese caso la fórmula sería TAE = $(1 + i_n)^k - 1$.

5.2. Ejemplos Uso de la Tasa Anual Equivalente

Ejercicios:

Calcular la TAE de un préstamo a 2 años con capitalización trimestral al 5,5% de interés compuesto anual.

Partiendo de la fórmula de la TAE = $(1 + i_n)^k - 1$, tenemos:

TAE = $(1 + 0{,}055/4)^4 - 1 = (1 + 0{,}01375)^4 - 1 = 1{,}0561 - 1 = 0{,}0561$. Es decir un TAE del 5,61%.

Calcular la TAE del primer año de un préstamo hipotecario a 25 años al euribor a un año + 0,80% de interés anual variable, si el euribor a un año al comienzo del primer año de duración del préstamo es el 3,60%. Nota: los préstamos hipotecarios suelen tener capitalización mensual de intereses.

Como en el ejemplo anterior, partiendo de la fórmula de la TAE = $(1 + i_n)^k - 1$, tenemos:

TAE = $(1 + 0{,}044/12)^{12} - 1 = (1 + 0{,}003667)^{12} - 1 = 1{,}0449 - 1 = 0{,}0449$. Es decir un TAE del 4,49%.

Calcular la TAE de un descubierto en cuenta corriente de 3 días al tipo de interés anual compuesto del 9% con capitalización diaria intereses, y con una comisión por generación del descubierto de 0,25%.

Partiendo de la fórmula de la TAE = $(C_1 / C_0)^{365/n} - 1$.

Importe a devolver al banco (C_1) por cada euro de descubierto en cuenta corriente:

$C_1 = (1 + 0{,}09/365)^3 = (1 + 0{,}000247)^3 = 1{,}00073991$

Importe real prestado por el banco (C_0) por cada euro de descubierto:

C_0 = 1 - Comisión por descubierto = $1 - (1 \times 0{,}0025) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$

Por lo que TAE = $(1{,}00073991 / 0{,}9975)^{365/3} - 1 = (1{,}003248)^{121{,}67} - 1 = 1{,}4837 - 1 = 0{,}4837$.

Es decir, independientemente del importe del descubierto, el TAE de la operación de descubierto bancario por 3 días sería del 48,37%.

6. ANÁLISIS DE INVERSIONES

6.1. Introducción

El **análisis de inversiones** proporciona una valoración de los distintos proyectos de inversión que facilita la selección de la inversión más conveniente para la empresa.

Con relativa frecuencia la dirección de la empresa debe tomar decisiones de inversión como por ejemplo: el estudio de una posible entrada en un negocio, la valoración de una empresa ya en funcionamiento, la sustitución de un equipo productivo ya en uso por otro nuevo que incorpore tecnología más avanzada, etc.

Las decisiones de inversión son importantes ya que comprometen a la empresa durante un largo periodo de tiempo, en forma irreversible en la mayoría de los casos, ya que la mayor parte de las inversiones suelen ser muy difícilmente recuperables.

La dirección de la empresa cuenta con el área conocida como análisis de inversiones para apoyar esta toma de decisiones entre proyectos alternativos de inversión.

Existen diferentes métodos de evaluación de inversiones, que permiten facilitar la toma de decisiones empresariales respecto a selección entre inversiones alternativas. Estos métodos son procedimientos de evaluación de fácil seguimiento y aplicación, y que hacen posible la toma de decisiones con un mayor grado de conocimiento.

Las técnicas de **descuento financiero** desarrolladas por las matemáticas financieras son la herramienta básica utilizada por los distintos métodos de análisis de inversiones.

6.2. Proceso en la Valoración de Inversiones

Para poder realizar un proceso de valoración de un proyecto de inversión es necesario recolectar toda una serie de información técnica y económica sobre el mismo:

- Previsiones de ingresos (ventas) del proyecto.
- Previsiones de los costes del proyecto. Incluirá al menos los siguientes puntos:
    - Costes del proceso de producción: materias primas, productos intermedios, materias auxiliares, etc.
    - Costes de medios de producción: oficinas, fábricas, almacenes, instalaciones y maquinaria asociada al proceso productivo, tecnología o "know-how", etc.
    - Personal necesario para la explotación y desarrollo del proyecto.
    - Servicios exteriores necesarios.

Después de determinar la información técnica y económica del proyecto corresponde realizar el análisis económico-financiero del mismo. Para poder realizar la modelización económico-financiera es necesario tener perfectamente determinados tres parámetros:

- **Horizonte temporal**, que es el periodo que transcurre desde que tiene lugar el desembolso inicial hasta que se produce el último ingreso o pago.
- El **desembolso inicial** (-A), revisando que no quede ningún concepto sin incluir, no solo el coste de los equipos fijos sino también los gastos iniciales asociados (todos los de puesta en marcha), etc.
- Los **flujos netos de caja** positivos o negativos generados por el proyecto **en cada periodo de tiempo** (Q_t), siendo objetivos y más bien conservadores en la estimación de las ventas y costes. Hay que tener siempre presente que a medida que nos alejamos del momento 0 (el de la estimación), las estimaciones sobre los flujos netos de caja (también conocidos como cashflow operativos) son más aleatorias.

Para valorar proyectos de inversión no se tiene en cuenta los posibles gastos derivados de la financiación ajena. La valoración de inversiones trata de calcular la rentabilidad

interna de una inversión, con independencia de la fórmula concreta que se aplique para la financiación de los recursos necesarios para la puesta en marcha de dicha inversión, se utilicen recursos propios, recursos ajenos con coste, recursos ajenos sin coste, etc.

En base a los tres parámetros enunciados anteriormente, es decir el desembolso inicial, el horizonte temporal del proyecto, y los flujos netos de caja generados, los criterios más utilizados suelen englobarse en dos grandes grupos denominados métodos estáticos y métodos dinámicos.

- Los **métodos estáticos**, también conocidos como métodos aproximados, son aquellos que no toman en consideración la distribución temporal de los flujos monetarios y consiguientemente lleva a cabo una comparación de magnitudes monetarias no homogeneizadas.

- Los **métodos dinámicos**, que si tienen en cuenta el momento del tiempo en que los flujos monetarios se van generando, compara cantidades homogeneizadas.

6.3. Plazo de Recuperación

El plazo de recuperación es el modelo estático más utilizado. Se trata de un modelo que se centra en el periodo de tiempo que media hasta la recuperación de la inversión inicial.

El método conocido como plazo de recuperación de la inversión (también conocido como “pay-back” de la inversión) es el modelo de valoración de inversiones estático más utilizado.

El plazo de recuperación se define como el tiempo que tarda en recuperarse (amortizarse) el desembolso inicial A de cualquier proyecto de inversión.

El plazo de recuperación se calcula mediante un sistema iterativo, es decir, acumulando los sucesivos flujos netos de caja hasta que la suma sea al menos igual al desembolso inicial A.

Si en el proyecto (además de A) los primeros Q_t fueran negativos, el plazo de recuperación sería el tiempo necesario para amortizar la suma de todos los flujos de caja negativos de proyecto.

La principal deficiencia del plazo de recuperación es que, al ser un método estático, no considera la distribución temporal de los flujos monetarios, por lo que compara magnitudes monetarias no homogéneas. Esto es especialmente problemático en situaciones de alta inflación y elevados tipos de interés.

El plazo de recuperación es un método de valoración de inversiones muy fácil de calcular y que resulta especialmente interesante en proyectos de inversión de alto riesgo para ver si se recupera rápidamente o no el capital inicial invertido.

6.4. Valor Actual Neto

El método del Valor Actual Neto (VAN) también es conocido por su nombre en inglés "Net Present Value" (NPV).

El VAN es el valor actual neto de los rendimientos futuros esperados de una inversión. También puede definirse como la diferencia actualizada entre cobros y pagos a los que una inversión da lugar.

Su expresión analítica sería la diferencia entre el desembolso inicial (-A) y la suma de las cajas o flujos de caja actualizados (Q_t):

$$VAN = -A + \frac{Q_1}{(1+K_1)} + \frac{Q_2}{(1+K_1)(1+K_2)} + \frac{Q_3}{(1+K_1)(1+K_2)(1+K_3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{Q_n}{(1+K_1)(1+K_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(1+K_j)\ldots\ldots\ldots(1+K_n)} = -A + \sum_{t=1}^{n} + \frac{Q_t}{\prod_{j=1}^{t}(1+K_J)}$$

K_j = tipo de actualización que aplicamos al periodo anual j. Podemos decir que K representa el tipo de interés (el coste de capital).

Como no es lo mismo una unidad monetaria hoy que dentro de X años, el VAN actualiza financieramente todos los flujos netos de caja al momento actual y los compara. La actualización financiera consiste en realizar un descuento financiero compuesto de los flujos netos de caja a un determinado tipo de interés.

El VAN aunque tiene una fórmula algo compleja pero puede ser fácilmente calculado usando la correspondiente función de la hoja de cálculo o de la calculadora financiera.

El criterio de decisión y jerarquización en base al VAN es el siguiente:

- Si VAN > 0, el proyecto es aceptable.
- Si VAN < 0, el proyecto es rechazable.
- Si VAN = 0, el proyecto resulta indiferente.

La interpretación económica cuando VAN > 0 no es otra que considerar que se está produciendo una adición neta al capital económico de la empresa, es decir, un aumento del valor de la empresa que repercute positivamente en la maximización del valor de la empresa para los accionistas.

Cuando dispongamos de varios proyectos alternativos aceptables en base al VAN se ordenan de mayor a menor VAN.

Ventajas del VAN:

- Se considera el factor tiempo para su cálculo, por lo que contemplamos cantidades homogéneas.
- Se calculan rentabilidades reales, ya que el VAN supone un remanente o diferencial. El VAN representa la adición neta al capital económico que supone el proyecto de inversión analizado para la empresa.

Inconvenientes del VAN:

- Necesidad de buscar un tipo de actualización adecuado.

6.5. Tasa Interna de Retorno

El método de la Tasa Interna de Retorno (TIR) también es conocido por su nombre en inglés "Internal Return Rate" (IRR).

La TIR se define como aquél tipo de actualización o descuento que hace igual a cero el VAN de una inversión.

Se puede decir que la TIR de una inversión es el umbral de rentabilidad de esa inversión.

El criterio de decisión consistirá en comparar la TIR del proyecto con la tasa de interés mínima deseada para el proyecto (i)

- TIR = i, la inversión es indiferente.
- TIR > i, la inversión es aceptable.
- TIR < i, la inversión es rechazable.

En el caso de varios proyectos alternativos válidos, la jerarquización de los proyectos se realizará atendiendo a los de mayor a menor valor de la TIR.

Ventajas de la TIR:

- Se considera el factor tiempo para su cálculo, por lo que suma cantidades homogéneas.
- Proporciona rentabilidades relativas (proporciona una tasa no un número absoluto), por lo que permite comparar proyectos en términos relativos.

Inconvenientes de la TIR:

- Cálculo complejo. Si bien ha quedado resuelto con el uso de aplicaciones informáticas.

6.6. Ejemplo y Consideraciones Finales

Ejercicios:

Calcular el plazo de recuperación, el VAN y la TIR de un proyecto de inversión que cuenta con un desembolso inicial de €500.000 y unos flujos netos de caja esperados de €150.000 para los próximos 4 años. Tipo de actualización a aplicar al VAN igual al 5%.

Plazo de recuperación

Año 1 Recuperado: €150.000 Pendiente: €350.000

Año 2 Recuperado: €300.000 Pendiente: €200.000

Año 3 Recuperado: €450.000 Pendiente: €50.000

Año 4 Recuperado: €600.000 Pendiente: €0

El plazo de recuperación sería pasado el tercer año. En concreto y suponiendo una recuperación constante de flujos a lo largo de cada año, la recuperación de la inversión sería:

Determinación exacta de la recuperación = Pendiente al principio del año 4 / Recuperado en el año 4 = €50.000 / €150.000 = 0,33 (al final del primer cuatrimestre del cuarto año).

VAN

$VAN = - A + Q_1 / (1 + K_1) + Q_2 / (1 + K_2)^2 + Q_3 / (1 + K_3)^3 + Q_4 / (1 + K_4)^4 =$ - €500.000 + € 150.000 / $(1 + K_1)$ + € 150.000 / $(1 + K_2)^2$ + € 150.000 / $(1 + K_3)^3$ + €150.000 / $(1 + K_4)^4$ = - €500.000 + €150.000 / (1,04) + €150.000 / $(1,04)^2$ + €150.000 / $(1,04)^3$ + €150.000 / $(1,04)^4$ = - €500.000 + € 144.231 + € 138.683 + € 133.349 + €128.221 = €44.484

La fórmula en la hoja de cálculo sería:

VAN = "-500000+VNA(4%;150000;150000;150000;150000)"

TIR

La TIR se define es el tipo de descuento que hace igual a cero el VAN de una inversión, en este caso es el 7,7138%. El cálculo debe hacerse con una calculadora financiera o con una hoja de cálculo.

La fórmula en la hoja de cálculo sería:

TIR = "TIR(-500000;150000;150000;150000;150000)"

Existen tres aspectos que deben estudiarse en relación con los criterios VAN y TIR:

1. Análisis de sensibilidad. Es deseable modificar los principales parámetros del modelo para ver el impacto que esto tiene valoración del proyecto. Es muy común diseñar un escenario optimista, un escenario más probable, y un escenario pesimista, y analizar los diferentes resultados obtenidos para ver la sensibilidad del proyecto a la variación de ciertos parámetros.

2. Incidencias de los impuestos sobre el beneficio de las empresas. Los impuestos deben ser correctamente estimados ya que disminuyen de manera importante los flujos de caja del proyecto. Hay además que considerar que existen diferencias temporales entre el reconocimiento del gasto del impuesto y su pago real a la Hacienda Pública, lo que afecta a la fórmula de actualización.

3. Incidencia de la inflación. Al utilizar el VAN y el TIR hay que considerar que el poder adquisitivo de los flujos monetarios afectados por una alta inflación es progresivamente menor.