

Master en Ingeniería Medioambiental y Gestión del Agua 2006/2007

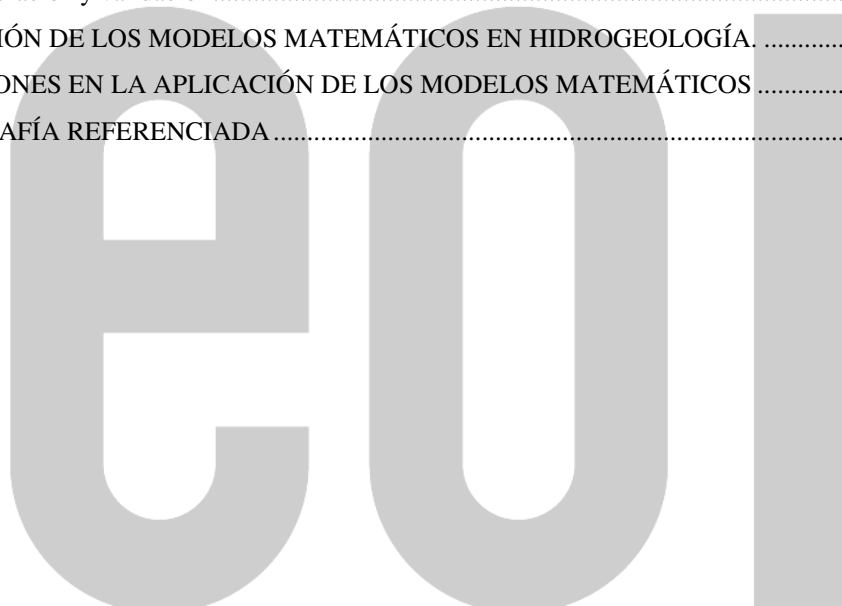
Módulo I: Contaminación Ambiental

# MODELOS MATEMÁTICOS EN HIDROGEOLOGÍA

AUTORES: JOAQUÍN CRUCES DE ABIA/LUIS MARTÍNEZ CORTINA

# Índice

1. INTRODUCCIÓN .....	3
2. CONCEPTO DE MODELO Y TERMINOLOGÍA UTILIZADA .....	3
3. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS HIDROLÓGICOS .....	4
3.1. Grupos de Modelos .....	4
3.2. Clasificación de los modelos matemáticos hidrogeológicos .....	5
4. ETAPAS EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS .....	10
4.1. Definición del modelo .....	10
4.2. Calibración y validación.....	12
5. UTILIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN HIDROGEOLOGÍA.....	13
6. LIMITACIONES EN LA APLICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS .....	14
7. BIBLIOGRAFÍA REFERENCIADA .....	14



## 1. INTRODUCCIÓN

El uso de modelos numéricos comenzó mucho tiempo atrás, si bien su generalización comenzó con la aparición comercial de las computadoras, y más concretamente con la difusión de los ordenadores personales. Su introducción en hidrogeología puede considerarse que comienza con el seminario de la UNESCO en Urbana en 1969. En España, la fecha clave puede ser 1972, con la organización de un seminario en el Servicio Geológico de Obras Públicas (SGOP) en 1972, en que intervinieron Prickett, Freeze y Bredehoeft. El primero es coautor del primer programa de modelos en hidrogeología que tuvo una difusión prácticamente universal (Prickett and Lonquist, 1971).

Los objetivos de este tema pueden resumirse en los siguientes puntos: 1) introducir al alumno en el uso del modelo de flujo más utilizado hoy día en el mundo, y referencia obligada de cualquier programa de simulación, el MODFLOW; 2) contribuir a la adquisición de una visión más cuantitativa de la hidrogeología; 3) insistir en los principios físicos que son imprescindibles para un uso correcto de los modelos (discretización, ecuaciones de flujo, principales fenómenos físicos simulados, condiciones de contorno, calibración, etc.).

Entre la bibliografía básica pueden citarse el CUSTODIO, E. y LLAMAS, M.R. (1983) entre los libros en castellano y ANDERSON, M.P. and WOESSNER, W.W. (1991) entre los específicamente dedicados a temas generales de modelos.

## 2. CONCEPTO DE MODELO Y TERMINOLOGÍA UTILIZADA

El concepto de modelo es tan general que el uso de esta palabra para una aplicación concreta requiere siempre de matizaciones. En general puede decirse que es cualquier representación simplificada de la realidad. Desde un punto de vista físico, podríamos definirlo como la representación matemática de un fenómeno físico, y por tanto cuantificable. Aún así, sigue siendo un concepto demasiado amplio que incluye acepciones tan variadas como: a) *Teórico*: conjunto de hipótesis, leyes experimentales, simplificaciones, etc. que permiten una representación simplificada de la realidad (Darcy); b) *Matemático*: descripción de las leyes físicas y relaciones mediante expresiones matemáticas, funciones, ecuaciones lineales o diferenciales, etc.; éstos a su vez pueden ser *analíticos* (como la fórmula de Thiem o el modelo de Green-Ampt) o *numéricos*, si las ecuaciones resultantes no admiten soluciones analíticas y deben ser resueltas mediante métodos numéricos; c) *Programa*: código informático que permite llevar a cabo los cálculos necesarios para ejecutar un modelo numérico (MODFLOW); d) *Específico*: de su aplicación a un sistema acuífero concreto (Modelo Madrid, Modelo GRAPES).

En otro orden de ideas se denomina *modelo conceptual* de un sistema al conjunto de ideas, leyes y relaciones que permiten la representación de un fenómeno físico y es usualmente la base de cualquier tipo de modelo.

Según la naturaleza del método utilizado se distingue entre a) *modelos gráficos*; b) *modelos físicos* que pueden ser de dos tipos: *modelos analógicos*, que permiten obtener resultados correspondientes a un problema físico, midiendo directamente en un modelo análogo de otra teoría física que se rige por ecuaciones formalmente idénticas a las del problema que se quiere resolver y sobre recintos geoméricamente semejantes; o a escala reducida, donde el modelo sigue las mismas leyes físicas pero a otra escala (normalmente menor), mediante el uso de las herramientas del análisis dimensional.

La mayoría de los problemas físicos reales no admiten soluciones analíticas, ni con la mayoría de las simplificaciones habituales, tanto conceptuales como funcionales. Los modelos numéricos se basan esencialmente en la resolución de las ecuaciones planteadas en el modelo conceptual por métodos numéricos aproximados. En este sentido, hay que resaltar que siempre son una aproximación a la realidad (“ab initio”, por su propia naturaleza) y en segundo lugar, los propios programas de cálculo incluyen a menudo numerosas simplificaciones o hipótesis adicionales para poder llevar a cabo su tarea, que en muchas ocasiones es incluso difícil que se cumplan en la realidad. Así pues hay que ser consciente tanto de sus limitaciones como de su utilidad, ya que permiten aproximarse de una forma progresiva a “nuestra idea de lo que es la realidad”, tanto más cuanto más datos tengamos del problema y de mayor calidad. Pero nunca seremos capaces de tener todos los datos necesarios para

asegurar que el problema resuelto por el modelo representa “exactamente” la realidad.

En esencia podemos decir que un modelo consiste en la reproducción de un fenómeno físico para su estudio y análisis. El modelo permite:

- Una visión de conjunto del proceso y de sus efectos.
- El análisis de la influencia de cada uno de los factores que intervienen en el proceso.
- Predicción del comportamiento del sistema ante diversas hipótesis de actuación.
- Obtención de conclusiones relativas diversas magnitudes que intervienen en el problema.
- Optimizar la gestión del sistema evitando consecuencias no deseadas.

### 3. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS HIDROLÓGICOS

#### 3.1. GRUPOS DE MODELOS

Según el concepto que se considere existen múltiples clasificaciones de los modelos. Atendiendo a las características más importantes, podemos considerar distintas clasificaciones. Una primera distinción puede hacerse atendiendo a la extensión del ámbito geográfico y objeto del modelo, entre modelos de cuenca, una de cuyas partes es necesariamente la parte subterránea, y modelos de acuíferos o sistemas acuíferos propiamente dichos.

##### Modelos de Cuenca.

Históricamente fueron los primeros en desarrollarse, esencialmente como modelos de precipitación-escurrimiento de una cuenca. Entre ellos podemos considerar:

- **Modelos Empíricos:** En realidad más que modelos son fórmulas empíricas obtenidas a principios del siglo pasado mediante correlaciones estadísticas de distintas variables a escala de cuenca. Proporcionan una primera estimación de orden de magnitud, pero tienen numerosas limitaciones. Ejemplos de ellos son las fórmulas de Coutagne, Turk, Becerril, etc.
- **Modelos de tipo Conceptual:** Los modelos conceptuales tratan de simular el comportamiento hidrológico de una cuenca estableciendo ecuaciones de balance hídrico y de transferencia entre diversos compartimentos, cuya mayor o menor complejidad dependerá de la escala temporal empleada en las simulaciones y del fenómeno hidrológico a modelizar. A mediados de los años 50 se confeccionó el primero de los modelos hidrológicos continuos de tipo conceptual, el modelo Thornthwaite, que reproduce el ciclo hidrológico de forma muy simplificada. Usa solamente tres parámetros, ya que utiliza pocas ecuaciones de transferencia y de balance de agua (Figura 1). En las dos décadas siguientes se realizaron numerosas variaciones sobre el mismo modificando las relaciones, incluyendo nuevos mecanismos, etc. Algunos ejemplos son los modelos de Stanford, Témez, etc. Aunque simulan diferentes fenómenos físicos involucrados en el flujo y almacenamiento de agua, no intentan resolver las correspondientes ecuaciones diferenciales sino que usan relaciones empíricas dependientes de pocos parámetros. Resulta especialmente adecuado para simular con una periodicidad temporal mensual o semanal, y se emplea en cuencas que tienen poca variabilidad fisiográfica. Su desarrollo conceptual es similar al de los modelos que le sucedieron en el tiempo, lo que ha hecho que se haya convertido en punto de referencia. En este modelo se considera el almacenamiento en el suelo similar al de un embalse, que tan sólo deja escapar agua cuando se encuentra totalmente saturado de humedad. Su escurrimiento, llamado “excedente”, se reparte entre un agua que discurre superficialmente y un agua que recarga el acuífero y que será drenada diferida en el tiempo. La aportación de origen subterráneo la simplifica considerándola proporcional a la escurrimiento, en un factor que depende de las características del suelo y del acuífero.

Estos dos tipos de modelos no tienen en cuenta la distribución de potencial hidráulico en los acuíferos ni los distintos mecanismos de flujo en los mismos, por lo que habitualmente no son utilizados para un estudio detallado, sino más bien como módulos dentro de otros modelos más generales, para tener en cuenta, de una forma global, los datos de la parte subterránea de interés en dichos modelos, sin que la carga de detalle y esfuerzo computacional que modelos hidrogeológicos más ambiciosos necesitan,

lastre el comportamiento del modelo global. Suele ser el caso de modelos de planificación de recurso hídricos, modelos de gestión, modelos de optimización de costes, etc.

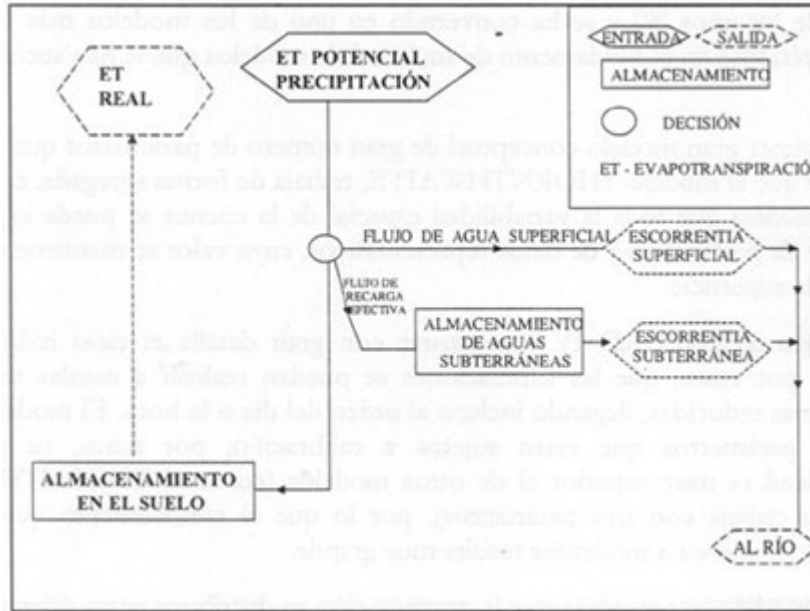


Figura 1.- Diagrama de flujo del modelo Thornthwaite.

### Modelos de Acuífero

Tratan de representar el funcionamiento hidrológico de las formaciones geológicas permeables, teniendo en cuenta con mayor o menor detalle, según sus objetivos, los distintos mecanismos de circulación y almacenamiento, relaciones con masas de agua superficiales, etc. a partir de sus formulaciones físicas, con más o menos simplificaciones. Pasaremos revista a continuación, con mayor detalle, a estos modelos que son los más utilizados hoy en día en hidrogeología.

### 3.2. Clasificación de los modelos matemáticos hidrogeológicos

Dentro de este tipo de modelos cabe distinguir a su vez dos grandes grupos: los modelos agregados y los distribuidos, atendiendo básicamente a su representación del espacio físico del terreno permeable, aunque, como veremos a continuación, a lo largo de la historia pueden verse casi combinaciones de muy diversa tipología. Los modelos agregados consideran un valor medio en todo el acuífero para cada variable, sin considerar su variabilidad espacial. Así, todas las variables de entrada y salida son representativas de todo el área de estudio. Por su parte, los modelos distribuidos son aquellos que consideran la variabilidad espacial de los datos y de los parámetros del sistema. El modelo puede tener en cuenta la variabilidad espacial de procesos como la precipitación, la infiltración, la evaporación, las características fisiográficas de la cuenca, etc.

Los modelos agregados utilizan unos pocos parámetros que globalizan el comportamiento del sistema, proporcionando una idea aproximada en sentido medio de la variación del estado del acuífero en el tiempo como respuesta a acciones exteriores globalizadas. Se suelen utilizar fundamentalmente para el estudio de sistemas donde no interesa conocer detalladamente la evolución espacial y temporal de las distintas variables hidrodinámicas del acuífero.

Los modelos distribuidos, por el contrario, consideran la distribución espacial del acuífero, sus propiedades hidrodinámicas, la localización de los límites, los tipos de condiciones de contorno y la situación de las acciones exteriores, dando la evolución, tanto espacial como en el tiempo, de las variables hidrodinámicas del acuífero. Se utilizan, en definitiva, cuando el sistema a modelar es el

sistema acuífero propiamente dicho, y no únicamente como parte de un sistema físico más complejo o de cualquier otro tipo (económico, de gestión, ordenación del territorio, etc.). No siempre se dispone de datos piezométricos y de explotación que permitan utilizar un modelo distribuido, por lo que en muchas ocasiones, a pesar de la variabilidad hidráulica del acuífero, se recurre a los modelos agregados.

Dentro de los modelos distribuidos cabe distinguir a su vez dos grupos: los de parámetros agregados, donde las propiedades hidrodinámicas del acuífero no varían espacialmente, pero sí lo hacen las acciones exteriores sobre el mismo; y los de parámetros distribuidos, donde tanto las propiedades hidrodinámicas del acuífero como las acciones exteriores sobre el mismo varían espacialmente. En los primeros, para geometrías y condiciones de contorno sencillas, existen algunas soluciones analíticas de la ecuación diferencial de flujo, mientras que en los segundos se recurre a la discretización del acuífero en celdas con propiedades hidrodinámicas homogéneas, y a la posterior resolución de las ecuaciones resultantes mediante métodos numéricos.

La modelización hidrológica se ha movido preferentemente, hasta hace no mucho tiempo, en el terreno de los modelos agregados. Se planteaban así modelos muy simplificados, principalmente por dos motivos: en primer lugar, la capacidad de cálculo de los equipos informáticos utilizados no era demasiado grande, lo que dificultaba plantear de manera distribuida la resolución del conjunto de las ecuaciones que describen los procesos implicados en el ciclo hidrológico. En segundo lugar, el conocimiento que se tenía de la realidad física de la mayoría de las cuencas no era tan grande como para permitir evaluar, de manera operativa, la totalidad de los parámetros que hubiera sido necesario utilizar para plantear un modelo complicado.

La posibilidad de utilizar modelos hidrológicos distribuidos se ha visto muy favorecida en los últimos años gracias al cada vez más profundo conocimiento del medio físico y al continuo perfeccionamiento de las herramientas informáticas. En concreto, la teledetección y los Sistemas de Información Geográfica son dos de las principales herramientas que han producido este significativo avance.

### Modelos Agregados

El modelo más sencillo existente consiste en suponer que el acuífero es un depósito (modelo unicelular) al que se aplica el principio de conservación de la masa, dando como resultado la ecuación de continuidad representada por la ecuación diferencial:

$$E(t) - S(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (1)$$

donde  $E(t)$  son las entradas al acuífero,  $S(t)$  las salidas y  $V(t)$  el volumen almacenado en cada instante de tiempo. Si se pueden aceptar algunas expresiones analíticas sencillas para  $E$  y  $S$ , y se puede integrar la ecuación, se obtendría una expresión analítica para  $V$ . Lo normal es que esto no sea posible, sino que se conozcan los valores puntuales agregados en una determinada escala temporal (horas, días, meses, etc.). En este caso se podría integrar numéricamente, obteniendo el volumen almacenado en cada instante de tiempo a esa escala temporal.

Este modelo no establece ninguna relación entre las salidas del acuífero y el volumen almacenado (representado por su nivel piezométrico) que el lo habitual, ya que normalmente los acuíferos descargan el exceso de agua almacenada mediante manantiales o a los cursos de agua superficial que discurren sobre ellos. El modelo agregado más utilizado que tiene en cuenta esto, conocido como modelo unicelular o modelo de manantial, supone que el caudal es proporcional al volumen almacenado por encima del umbral de salida del manantial, según la relación:

$$Q(t) = \alpha V(t) \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es una constante con dimensiones de  $[T^{-1}]$ . Introduciendo esta expresión en la ecuación (1), se puede integrar, admitiendo que las únicas salidas son las del manantial, que la recarga es constante y unas condiciones iniciales  $V_0$ , quedando la expresiones:

$$V(t) = V_0 e^{-\alpha t} + R(1 - e^{-\alpha t}) / \alpha ; \quad Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t} + R(1 - e^{-\alpha t}) \quad (3)$$

Al ser lineal este modelo se puede aplicar el principio de superposición. Si no hay recarga, se obtiene la conocida expresión:  $Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}$ , que permite calcular el coeficiente  $\alpha$  (llamado coeficiente de agotamiento) ajustando una recta al diagrama semilogarítmico de caudales durante un período de estiaje. Obviamente es un modelo muy simple que difícilmente puede representar el comportamiento de acuíferos de una cierta entidad, quedando reducida su utilidad práctica a pequeños acuíferos colgados que descargan a través de uno o varios manantiales.

### Modelos Distribuidos de parámetros agregados

Están basados en soluciones analíticas de la ecuación diferencial del flujo en un acuífero con hipótesis simplificativas:

- Acuífero bidimensional
- Geometría sencilla: rectangular, semicircular, semiinfinita, etc.
- Condiciones de contorno sencillas
- Acuífero homogéneo: T y S constantes
- Comportamiento lineal (admite el principio de superposición)

En estos tipos de modelos caben destacar los modelos Glover-Jenkins y los modelos pluricelulares englobados

### Modelos Glover-Jenkins

Están basados en la solución analítica de acuífero homogéneo e isótropo de extensión semiinfinita limitado por un río recto totalmente penetrante. Permiten obtener el caudal detráido del río por un pozo totalmente penetrante situado a una distancia "d" del río. (Glover & Balmer, 1954). Posteriormente Jenkins (1968) presenta curvas adimensionales para determinar el caudal y volumen antes y después de la suspensión del bombeo en el pozo. Moulder y Jenkins (1969) lo aplican a acuíferos reales usando modelos analógicos R-C.

### Modelos pluricelulares englobados

La ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna el flujo en medios permeables puede resolverse analíticamente para casos de acuíferos homogéneos con geometrías y condiciones de contorno sencillas. siguiendo este planteamiento Sahuquillo (1981) obtiene la siguiente expresión para un acuífero rectangular y homogéneo conectado a un río totalmente penetrante con un pozo de bombeo o recarga de caudal constante Q:

$$\frac{Q_r}{Q} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (1 - e^{\alpha_i t}) \quad (4)$$

en la que los  $b_i$  son los coeficientes de reparto de la recarga/bombeo entre los distintos términos del sumatorio y  $\alpha_i$  son los coeficientes de descarga del acuífero, que coinciden con los autovalores que resultan de resolver la ecuación diferencial por el método de los autovalores.

Los autovalores  $\alpha_i$  pueden expresarse por:  $(2i+1)^2 \alpha$  (Sahuquillo, 1983), siendo:  $\alpha = \frac{\pi^2 T_x}{4SL^2}$ , donde  $T_x$

es la transmisividad en la dirección del flujo, S el coeficiente de almacenamiento y L la distancia del borde impermeable al río. Posteriormente se extendió al caso de que el río, en lugar de ser totalmente penetrante, estuviera conectado al mismo a través de una capa de limos.

### Modelos Distribuidos de parámetros distribuidos

Resuelven la ecuación diferencial en derivadas parciales que describen el flujo subterráneo en régimen transitorio, en una dos o tres dimensiones. Dado que no existen soluciones analíticas prácticamente, son siempre modelos numéricos, y en la actualidad son los únicos utilizados. En ellos los parámetros también están distribuidos, es decir, dependen de la posición de cada punto: las



propiedades hidrodinámicas varían espacialmente. Suponen el intento de simular el comportamiento del acuífero de la manera más próxima a la realidad, y es a los que vamos a dedicar un mayor atención. Los principales modelos de este tipo son los modelos en Diferencias Finitas, modelos en Elementos Finitos y recientemente, y en menor medida, modelos de Elementos de Contorno.

La aproximación a la solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales realizada con los modelos numéricos o digitales, suponen la sustitución del recinto continuo en que están planteadas por una malla discreta y finita de nudos, que será en los que se calcule la función resultado (el potencial hidráulico en el caso de los modelos de flujo). La ecuación diferencial inicial es entonces sustituida por un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son los valores del potencial en dichos nudos. El paso de la ecuaciones diferenciales al sistema de ecuaciones puede realizarse según dos planteamientos: *matemáticamente*, aplicando las reglas de cálculo aproximado de la distintas derivadas existentes en la ecuación; o bien *físicamente*, planteando directamente los principios y teoremas que dan lugar a la ecuación diferencial a la celda genérica. En algunos métodos el resultado es el mismo si se eligen adecuadamente las simplificaciones utilizadas.

La discretización depende en muchas ocasiones del método numérico que se quiera desarrollar. Los principales métodos utilizados actualmente por la mayoría de los programas de modelos digitales se reducen a dos: el método de las *diferencias finitas* y el de los *elementos finitos*, si bien existen otros, como el de elementos de contorno.

**El método de las diferencias finitas.** Utiliza el concepto de sustituir las propiedades de una parte del medio, denominado *celda*, por unos valores medios representativos del mismo. Asimismo, aplica el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones diferenciales. La malla está limitada a redes ortogonales normalmente o con simetría cilíndrica o esférica, donde se puedan discretizar la ecuaciones.

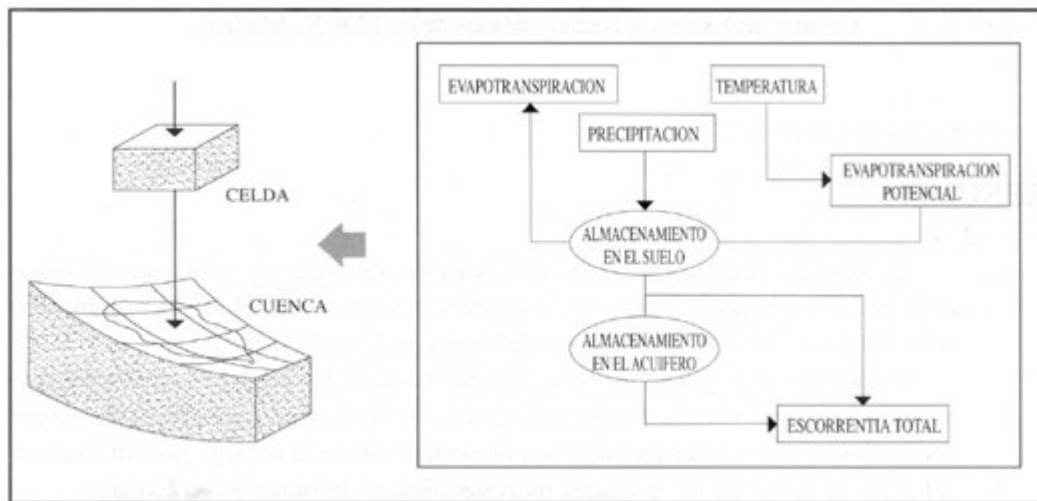
**El método de los elementos finitos.** Consiste en una aproximación completamente diferente al problema. La función a obtener (potencial hidráulico) se consigue minimizando un funcional que la incluya en una integral extendida a todo el recinto donde se produce el fenómeno estudiado, mediante técnicas de cálculo variacional. El valor de la integral se aproxima mediante diversas técnicas, suponiendo conocido el potencial en los nudos e interpolando mediante unas funciones de interpolación (características de cada tipo de elemento finito) entre medias. Como principal ventaja puede citarse la mayor flexibilidad para adaptarse a la geometría del problema, dada la gran cantidad de elementos desarrollada.

### **El modelo SIMPA**

Se incluye aquí éste modelo de difícil encuadre en la clasificación anterior, ya que es por una parte de tipo conceptual en cuanto al tratamiento de la representación del ciclo hidrológico a nivel local (una celda), pero al mismo tiempo es de tipo distribuido, ya que se extiende a toda la cuenca, y pretende representar el funcionamiento global de la misma, no sólo de la parte subterránea. Su interés radica en que es el modelo utilizado para la elaboración del Libro Blanco del Agua en España por parte del Ministerio de Medio Ambiente. Se encargó al Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX una evaluación de los recursos subterráneos a la escala global de todo el territorio nacional. Para ello utilizó el modelo hidrológico SIMPA (Sistema Integrado de Modelización Precipitación-Aportación), de tipo conceptual y distribuido, que simula, en régimen natural, series mensuales de recargas a los acuíferos y caudales en la red fluvial. Estos datos han sido usados con posterioridad para la elaboración de los sucesivos Planes Hidrológicos Nacionales.

El modelo SIMPA reproduce los procesos esenciales de transporte de agua que tienen lugar en las diferentes fases del ciclo hidrológico (Figura 2) planteando el principio de continuidad y estableciendo leyes de reparto y transferencia entre almacenamientos en cada una de las celdas en las que se discretiza el territorio. La resolución temporal utilizada fue el mes, por lo que podía obviarse la simulación de un gran número de almacenamientos intermedios y la propagación del flujo en la cuenca. En cuanto a la resolución espacial, el tamaño de celda seleccionado fue de 1 km × 1 km, lo que suponía que en cada paso de tiempo se simulaban los distintos componentes del ciclo hidrológico en más de 500.000 celdas.





**Figura 2.- Diagrama de flujo del modelo SIMPA.**

A partir de las precipitaciones, las evapotranspiraciones potenciales y los parámetros hidrológicos, el modelo obtiene los mapas de los distintos almacenamientos, humedad en el suelo y volumen del acuífero, y de las variables de salida del ciclo hidrológico, evapotranspiración y escorrentía total, obtenida esta última como suma de la escorrentía superficial y la subterránea. Los caudales mensuales en la red fluvial se obtienen integrando, en cada intervalo de tiempo, la escorrentía total en las cuencas vertientes a los puntos de simulación.

El intercambio de agua entre acuífero y río se simula mediante el modelo unicelular. Una vez calculada la recarga en cada una de las celdas pertenecientes a los distintos acuíferos definidos, el modelo realiza su integración en los recintos que los definen y aplica de forma agregada las ecuaciones del mencionado modelo unicelular, para así conocer la evolución del volumen almacenado en el acuífero y su descarga a la red fluvial o al mar.

Los parámetros del modelo distribuido SIMPA son los mapas de capacidad máxima de almacenamiento de humedad en el suelo, la capacidad máxima de infiltración y los coeficientes de recesión de los acuíferos. La calibración del modelo consiste en ajustar los mapas de parámetros de forma que se reproduzcan satisfactoriamente los caudales en los puntos donde esta información es conocida. La mayoría de los datos de calibración correspondían a estaciones de aforo donde se miden caudales en régimen natural, aunque también se utilizaron series restituidas a régimen natural procedentes de los Planes Hidrológicos de cuenca, disponiéndose en total de más de 100 puntos de control.

Para lograr el ajuste del modelo los parámetros de las cuencas aforadas no se calibraron de forma matemática, sino que sus valores se obtuvieron de forma distribuida para todo el territorio a partir de las características físicas de las cuencas, principalmente los usos del suelo y la litología. De esta manera los parámetros estimados en las cuencas no aforadas, que cubren un gran porcentaje del territorio, son consistentes con sus características y pueden ser estimados con mayor fiabilidad.

El parámetro denominado coeficiente de recesión se obtuvo a partir del conocimiento cualitativo del funcionamiento de los acuíferos, de sus propiedades hidrodinámicas, cuando éstas eran conocidas, y fundamentalmente de las curvas de agotamiento de los acuíferos observadas en las estaciones de aforo de los ríos. Como resultado del proceso anterior se obtuvo un valor del coeficiente de recesión para cada una de las unidades hidrogeológicas.

La utilización de este modelo conceptual supuso un gran avance desde el punto de vista de la

evaluación de los recursos hídricos de una forma homogénea para todo el país, con criterios modernos y uniformes de simulación de todo el ciclo hidrológico. Sus resultados han de ser entendidos en el contexto de las condiciones existentes y de los objetivos perseguidos. Puede decirse que se consiguió una adecuada estimación global de los recursos hídricos si se consideran las limitaciones existentes a la hora de interpretar y utilizar dichos resultados.

Desde el punto de vista exclusivo de las aguas subterráneas hay que ser conscientes de las limitaciones del modelo utilizado para esta evaluación de los recursos hídricos en régimen natural. Dado su carácter de modelo conceptual, no se simula el flujo de las aguas subterráneas propiamente dicho, sino que estas intervienen sólo como una de las componentes en la obtención del flujo total. Así, por ejemplo, el modelo no admite la infiltración indirecta en el acuífero de aguas procedentes de cauces superficiales (acuíferos desconectados o descolgados). Asimismo no se puede producir evapotranspiración desde el acuífero.

En definitiva, el modelo de flujo subterráneo que utiliza SIMPA permite abordar gran cantidad de problemas hidrológicos en régimen natural, tanto a escala regional como local, así como hacer una estimación de los recursos hídricos, pero no permite simular el movimiento del agua dentro del acuífero, y sin duda existen situaciones en las que el modelo no puede comportarse de forma satisfactoria: acuíferos de gran complejidad, flujos subterráneos muy localizados, aportaciones importantes desde la red de drenaje superficial, bombeos, desconexiones río-acuífero, etc.

Por ello, para un análisis más real y detallado de bastantes de los acuíferos españoles, cuya situación en muchos casos dista mucho de la correspondiente al régimen natural, puede resultar más apropiada la utilización de modelos que permitan simular el flujo de las aguas subterráneas con todas sus características específicas.

#### **4. ETAPAS EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS**

El proceso de desarrollo de un modelo numérico requiere una planificación cuidadosa para conseguir que el tiempo y dinero invertido proporcione los resultados esperables del mismo. Las etapas previas podrían resumirse en las siguientes:

##### **4.1. Definición del modelo**

###### **a). Modelo conceptual**

Es el primer paso y el más importante con diferencia. En él debe quedar reflejada la idea que tenemos del funcionamiento del acuífero a la vista de los datos disponibles, que condicionaran, a su vez, el tipo y nivel de detalle del modelo. Entre otros deberán quedar definidos: geometría, parámetros hidrogeológicos básicos (permeabilidad, transmisividad, coeficientes de almacenamiento, factor de goteo, etc.), régimen de funcionamiento hidráulico de las distintas unidades (confinado, semiconfinado, libre, etc.), términos del balance general del acuífero (recarga, descarga, bombeos, relaciones con masas de agua, etc.), nivel de representación (uni, bi o tri-dimensional). Una vez ejecutado el modelo y comparado con la realidad, algunas de estas ideas tendrán que ser cambiadas o modificadas para ajustarlas a la realidad de los datos.

###### **b). Definición general del posible modelo**

Esta etapa incluiría: 1). Análisis de objetivos; 2) datos disponibles y posibilidad de obtener nuevos datos; 3) necesidad de un modelo y grado de complejidad del modelo a utilizar; 4) elección del tipo de modelo y programa de cálculo necesario.

###### **c). Discretización**

Definición del grado de finura de la malla y de la resolución en el tiempo, que será función del nivel de precisión deseado, de los datos disponibles y de la geometría del sistema, así como de los objetivos asignados al modelo. La misma también tendrá que tener en cuenta las condiciones de contorno existentes.

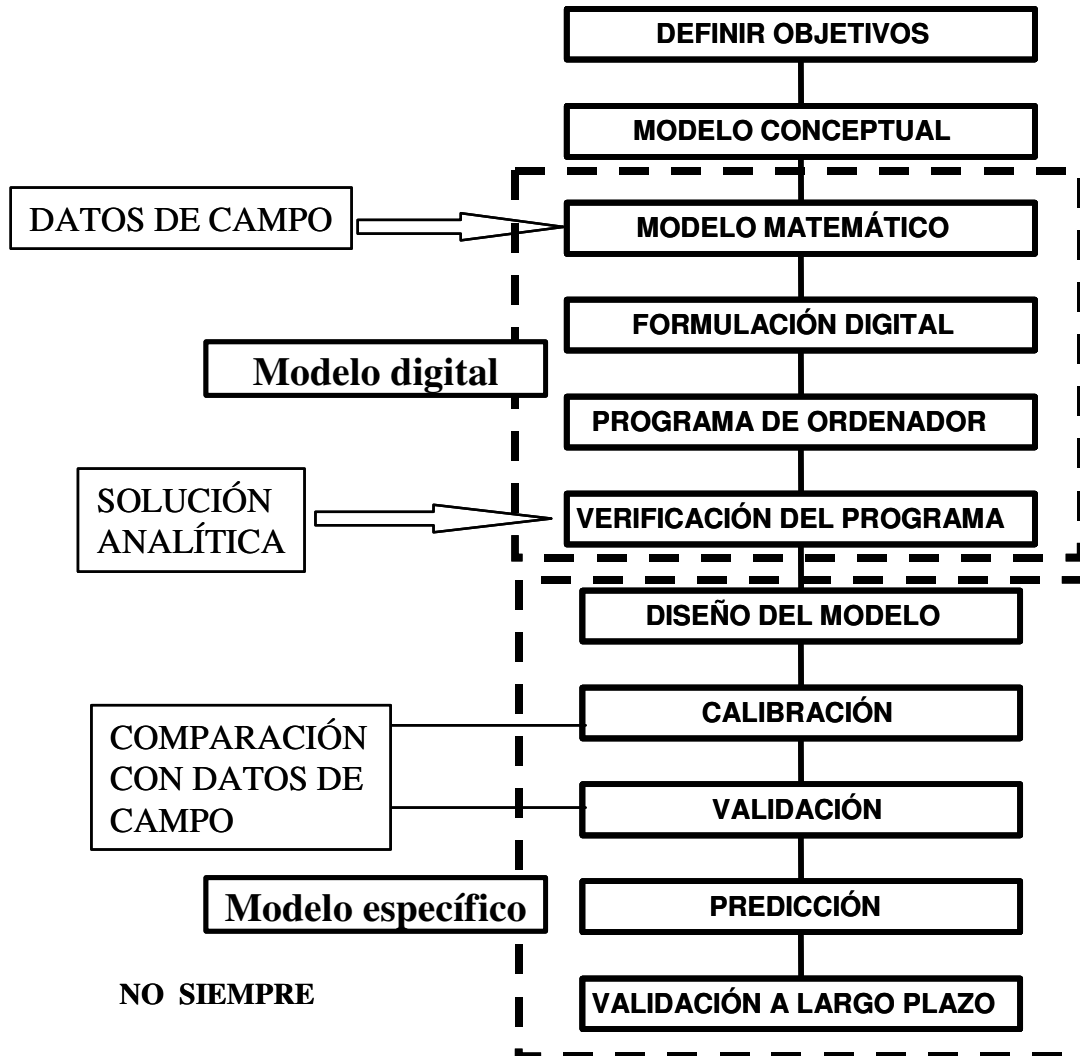


Figura 2.1.- Esquema del proceso de elaboración de un modelo.

**d). Condiciones de contorno**

Los bordes del modelo deberán definirse basándose en los datos de geometría existentes. La resolución de la ecuación diferencial exige el conocimiento de las condiciones de contorno existentes en todo el contorno y a lo largo de todo el período simulado. Esta limitación puede obligar a modificar los límites iniciales, si no se conocen con suficiente detalle las mismas. Los principales tipos son: a) potencial hidráulico dado; b) caudal dado, cuyo caso más simple es el borde impermeable, cuando ese caudal es nulo; c) una relación entre el caudal que atraviesa el contorno y el potencial en el acuífero.

**e). Acciones externas a incluir**

Correspondería a la fijación de los principales fenómenos que actúan sobre el acuífero y condicionan su funcionamiento, como: recarga distribuida procedente de la lluvia, evapotranspiración, bombeos, drenaje hacia ríos o recarga inducida de los mismos, descargas procedentes de manantiales, drenajes agrícolas, etc.

El proceso de modelación puede verse resumido en la Figura 2.1. A continuación se resumen algunos de los aspectos más esenciales.

## 4.2. Calibración y validación

Una de las principales etapas en el proceso de simulación, y la que más tiempo suele llevar, consiste en la calibración: proceso mediante el cual se consigue que el modelo reproduzca los datos de campo disponibles.

### a). El proceso de calibración

Para conseguir este objetivo debe seguirse un método previamente diseñado, ya que si no, la enorme cantidad de datos manejada puede hacer interminable el proceso. En primer lugar conviene definir claramente los objetivos de calibración. En segundo lugar, el sistema de calibración elegido: por prueba y error o uso de algún sistema de optimización automática de parámetros. Definir los datos de calibración a utilizar: niveles piezométricos y caudales, en general, así como aquellos específicos del problema planteado que se consideren esenciales para la reproducción de las principales características del sistema. Finalmente reunir toda la información previa necesaria: valores de parámetros, condiciones de contorno, condiciones hidráulicas, incertidumbres, etc.

### b). Técnicas de calibración

La más utilizada hasta el momento consiste en el sistema de *prueba y error*. Se van modificando los parámetros del sistema, uno a uno y comprobando el efecto resultante respecto a los objetivos de calibración. Dado que el número de parámetros existente en un modelo es elevado, conviene establecer una estrategia previa para ir asignando valores a distintos parámetros en un orden que permita que, aquellos que puedan considerarse calibrados, no necesiten ser modificados posteriormente, como consecuencia de la variación de otros.

El otro sistema de calibración, que se halla en auge en estos momentos, es el denominado de *optimización automática de parámetros* o uso de modelos inversos. Es conocido que una misma distribución de potencial puede obtenerse con distintas combinaciones de parámetros y acciones externas. Por ejemplo, en régimen estacionario, reduciendo la transmisividad en la misma proporción que la recarga. Los modelos inversos tratan de ajustar los valores de un parámetro predefinido mediante técnicas de optimización. En esencia consisten en la ejecución de un modelo directo repetidas veces para obtener los valores de potencial predichos por el mismo, compararlo con los valores de calibración e ir modificando los valores del parámetro a calibrar mediante algoritmos específicos, de forma que se optimice la diferencia entre los valores del modelo y de campo. En general sólo permiten optimizar un número reducido de parámetros simultáneos, lo que los hace inviable para parámetros distribuidos, aunque pueden ayudar a centrar el problema.

### c). Evaluación de la calibración

Una recomendación que suele hacerse por los expertos modelistas es la realización de una evaluación de la calibración, evitando la tendencia de dar por bueno un modelo basado únicamente en una visión cualitativa de los resultados, como los mapas de isopiezas y valores de niveles en unos cuantos puntos. Esto se puede llevar a cabo, mediante diferentes herramientas. Entre ellas citaremos: 1) medidas tradicionales de calibración (error medio, error absoluto medio, desviación estándar, superposición de isopiezas, etc.); 2) uso de niveles de calibración (clasificación en función de la proximidad o lejanía a los objetivos de calibración); 3) mapas de distribución de errores por celdas; 4) estimación de incertidumbres en el proceso de calibración. 5) análisis de sensibilidad de los principales parámetros.

### d) verificación o validación del modelo

Consistente en contrastar los resultados del modelo resultante de la calibración, con otro conjunto de datos independientes de los que han servido para la calibración. Si la aproximación del modelo es buena, puede considerarse que el modelo conseguido mediante la calibración responde a la realidad.

### e). Resumen del proceso de calibración.

Como resumen práctico podemos condensar las ideas para una calibración correcta de un modelo en los siguientes apartados:

#### *Antes de la calibración*

- 1.- Seleccionar los valores de calibración.
- 2.- Estimar errores en las medidas.
- 3.- Recopilar datos de campo necesarios.
- 4.- Asignar valores a los parámetros hidrogeológicos y su posible variación en cada zona.
- 5.- Preparar un mapa con los objetivos de la calibración y su situación en la malla.
- 6.- Preparar una tabla con las estimaciones iniciales de parámetros, condiciones de contorno y acciones hidráulicas.

#### *Después de la calibración*

- 1.- Calcular coeficientes de variación de los parámetros: RMS/M.
- 2.- Preparar una tabla con las diferencias entre los objetivos de calibración y los valores simulados.
- 3.- Calcular los errores ME, MAE, RMS en niveles. También RMS/ $\Delta h_{m\acute{a}x.}$ .
- 4.- Presentar la distribución espacial de las diferencias:
  - superposición de equipotenciales
  - isolíneas de diferencias en niveles piezométricos
  - mapa con posición y valor de objetivos de calibración y valores simulados
  - gráficos de valores medidos-simulados
  - gráficos de residuos
  - gráfico de errores versus nº de ejecución
  - gráfico de errores versus valores de los parámetros.
- 5.- Discusión del proceso de calibración justificando los cambios.
- 6.- Incluir un análisis de sensibilidad.

## **5. UTILIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN HIDROGEOLOGÍA.**

La utilización de los modelos numéricos puede enfocarse en función de los distintos fenómenos a estudiar. Así tenemos los modelos de flujo, donde únicamente se resuelven las ecuaciones de conservación de la masa y se obtiene la distribución de potencial en el acuífero, y a partir de él los caudales a través de cualquier sección, contorno, etc., relaciones con aguas superficiales, etc. Es la base para el resto de modelos, que resuelven además otras ecuaciones relacionadas, por ejemplo, con el transporte de solutos o calor.

**Modelos de flujo.** Su objetivo fundamental es la resolución de las ecuaciones de flujo en el recinto considerado, con las condiciones iniciales y de contorno dadas. Su resultado principal es la evolución del potencial hidráulico en el tiempo y el espacio. Conocida la distribución de potencial en cada instante, se pueden calcular caudales, velocidades de filtración, isopiezas, variación en el almacenamiento y demás magnitudes relacionadas con el movimiento del agua en el acuífero. Es un paso previo imprescindible para otros modelos de transporte, sean de masa o energía. Los modelos de flujo permiten: a) un estudio global del comportamiento de los acuíferos y de sus relaciones entre sí; b) el análisis cualitativo y cuantitativo de redes de flujo; c) analizar relaciones entre el acuífero y corrientes superficiales de agua; d) gestión racional de la explotación del acuífero (ubicación idónea de pozos, alternativas de gestión, etc.).

**Modelos de transporte de masa.** Persiguen obtener la evolución de la transferencia de masa de solutos existentes en el agua subterránea a través del acuífero, incluyendo fenómenos de advección, dispersión, reacciones químicas de intercambio con el medio u otros solutos presentes en el agua, decaimiento, etc. Su principal resultado es la evolución de las concentraciones de los diferentes solutos considerados en el espacio y en el tiempo. Sus principales utilidades incluyen: a) estudios de ubicación de vertederos; b) inyección de residuos; c) seguimiento de contaminantes químicos o radiactivos; d) técnicas de recuperación de acuíferos contaminados

**Modelos de transporte de calor.** Corresponden a modelos de transporte de energía. Dado que la

ecuación de difusión del calor es formalmente idéntica a de transporte de masas, pueden aplicarse los mismos esquemas numéricos que los anteriores, por lo que muchos programas incluyen ambas características. Se salda esencial es la evolución de las temperaturas del agua en el tiempo y el espacio. Se utilizan preferentemente para: a) análisis y proyecto de aprovechamientos geotérmicos; b) proyectos de instalación de bombas de calor para empresas o edificios; estudio de problemas de contaminación térmica de acuíferos.

En todos estos modelos el tipo de resultados que se pretenden obtener con un modelo condiciona normalmente tanto su concepción como su desarrollo, por lo que es esencial plantearse desde un principio el tema. Es lo primero que hay que plantearse: Para qué se quiere realizar un modelo y qué se pretende obtener de él. Atendiendo a este criterio podremos hablar de distintos tipos de modelos:

**Modelos genéricos.** Su objetivo sería una representación general de las principales características del acuífero con objeto de servir de marco al estudio de un acuífero y plantear los órdenes de magnitud de las principales variables del balance de agua en el mismo.

**Modelos interpretativos.** Realizados para el estudio de procesos, con objeto de conocer mejor la influencia de las diferentes magnitudes que intervienen en el mismo, detectar los datos necesarios más significativos, que permitan preparar las campañas de adquisición de datos, etc.

**Modelos predictivos.** Como su nombre indica están dirigidos a obtener la evolución previsible del acuífero en diversas hipótesis de actuación. Dada su finalidad, son los que necesitarían estar soportados por una etapa previa de calibración que garantice que el comportamiento del modelo reproduce aceptablemente los datos históricos disponibles. Como siempre en simulación, la calidad de sus resultados dependen en gran medida de la bondad y precisión de los datos disponibles así como de la experiencia del modelador.

## 6. LIMITACIONES EN LA APLICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Las principales limitaciones en cuanto al uso de los modelos matemáticos de tipo numérico residen básicamente en tres factores: datos disponibles sobre el sistema acuífero, características de los códigos disponibles para la solución de los problemas planteados y coste del mismo. La aplicación de modelos muy sofisticados desde un punto de vista matemático, que representen fielmente los diferentes fenómenos físicos que se producen en la realidad, exigen una gran cantidad de datos, muchos de ellos difícilmente disponibles y que pueden ser muy costosos para un estudio concreto, haciendo inviable su aplicación en la mayoría de los casos. Modelos como el SHE (Sistema Hidrológico Europeo, desarrollado por el BGS, SOGREAH y DHI) que simula fenómenos como fusión de la nieve, flujo en superficie, en Zona No Saturada, flujo subterráneo, etc. han sido raramente utilizados salvo para investigación y sólo en cuencas representativas muy estudiadas. Hoy día se va generalizando su uso, debido al aumento de potencia de los ordenadores, ayudas de obtención de automatizada de datos, uso de SIG, etc. Hoy día se comercializa bajo el nombre de MIKE-SHE. Desde el punto de vista de los códigos disponibles, cada día existen más sistemas integrados de modelización a precios asequibles (incluso gratuitos) que incluyen todas las herramientas necesarias para la elaboración del modelo y análisis de los resultados, si bien los métodos numéricos propiamente dichos, también plantean problemas de convergencia y robustez.

## 7. BIBLIOGRAFÍA REFERENCIADA

- ANDERSON, M.P. and WOESSNER, W.W. (1991). "Applied Groundwater Modeling". Academic Press Inc. San Diego. USA.
- CHOW, V.T. (1959). "Open-channel hydraulics". McGraw-Hill. New York. 680 pp.
- CRUCES, J. (2001). Evaluación de los recursos y el Libro Blanco. Metodología utilizada en cuanto a las aguas subterráneas. En: *Las Aguas Subterráneas en el Plan Hidrológico Nacional* (Eds: V. Iríbar, J. Grima, X. Sánchez-Vila). Asociación Internacional de Hidrogeólogos – Grupo Español. Ediciones Mundi-Prensa. 19–25.
- CUSTODIO, E. y LLAMAS, M.R. (1976). *Hidrología Subterránea*. Ediciones Omega. 2 volúmenes.



- 2350 pp. (2ª edición, 1983)
- ESTRELA, T. (1993). *Estimación de parámetros de recarga y descarga en un modelo de flujo subterráneo en un manantial cárstico*. Monografías del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas (CEDEX). Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. 304 pp.
- ESTRELA, T. (2001). Evaluación de los recursos y el Libro Blanco. Metodología utilizada en cuanto a las aguas subterráneas. En: *Las Aguas Subterráneas en el Plan Hidrológico Nacional* (Eds: V. Iribar, J. Grima, X. Sánchez-Vila). Asociación Internacional de Hidrogeólogos – Grupo Español. Ediciones Mundi-Prensa. 27–33.
- ESTRELA, T. y QUINTAS, L. (1996). El Sistema Integrado de Modelización Precipitación-Aportación SIMPA. *Revista de Ingeniería Civil*, nº 104, CEDEX–Ministerio de Fomento, pp. 43–52.
- GLOVER, R.E. and BALMER, C.G. (1954). “River depletion resulting from pumping a well near a river”. *Am. Geophysic Union Trans.* V. 35, 3ª parte. pp. 463-470.
- HILL, M.C. (1990). “Precondicioned Conjugate-gradient 2 (PCG2), a computer program for solving ground-water flow equations”. U.S. Geological Survey. Denver. Colorado. 43 pp.
- HSIEH, P.A. and FRECKLETON, J.R. (1992). “Documentation of a computer program to simulate Horizontal Flow Barriers using the U.S. Geological Survey modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model”. U.S. Geological Survey.
- HARBAUGH, A.W. (1990). “A computer program for calculating subregional water budgets using results from the U.S. Geological Survey modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model”. U.S. Geological Survey. Reston. Virginia. 46 pp.
- JENKINS, C.T. (1968). “Techniques for computing rate and volume of stream depletion by wells” *Ground Water*. V.7, nº 5, pp.37-46.
- MCDONALD, M.G. and HARBAUGH, A.W. (1988). “A modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model”. *Techniques of Water Resources Investigations of the U.S. Geological Survey*. Book 6. Chapter A1. 586 pp.
- MCDONALD, M.G., HARBAUGH, A.W., ORR, B.R. and ACKERMAN, D.J. “A method of converting no-flow cells to variable-head cells for the U.S. Geological Survey Modular Finite-difference Ground-water Flow Model”. U.S. Geological Survey. 99 pp.
- MIMAM (2000). *Libro Blanco del Agua en España*. Secretaría de Estado de Aguas y Costas. Dirección General de Obras Hidráulicas y Calidad de las Aguas. Ministerio de Medio Ambiente. 637 pp.
- PRICKETT, T.A. and LONNQUIST, C.G. (1971). “Selected Digital Computer Techniques for Groundwater Resources Evaluation”. *Bulletin 55*. Illinois State Water Survey. Urbana. USA. 62 pp.
- PRUDIC, D.E. (1989). “Documentation of a computer program to simulate stream-aquifer relations using a modular, finite-difference, ground-water flow model”. U.S. Geological Survey. Carson City. Nevada.
- SAHUQUILLO, J. (1981). “Obtención de funciones de influencia sobre los caudales de un río, de los bombeos, en un acuífero rectangular, homogéneo e isótropo conectado con él”. IV Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica. Zaragoza.
- SAHUQUILLO, J. (1983). “Modelos pluricelulares englobados”. Curso sobre utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas. Servicio Geológico de Obras Públicas y Universidad Politécnica de Valencia.
- RUIZ GARCÍA, J.M. (1999). *Modelo distribuido para la evaluación de recursos hídricos*. Monografías del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas (CEDEX). Ministerio de Fomento. 245 pp.
- WHITE, F.M. (1979) “Fluid Mechanics”. Editor. McGraw-Hill. New York. 701 pp.